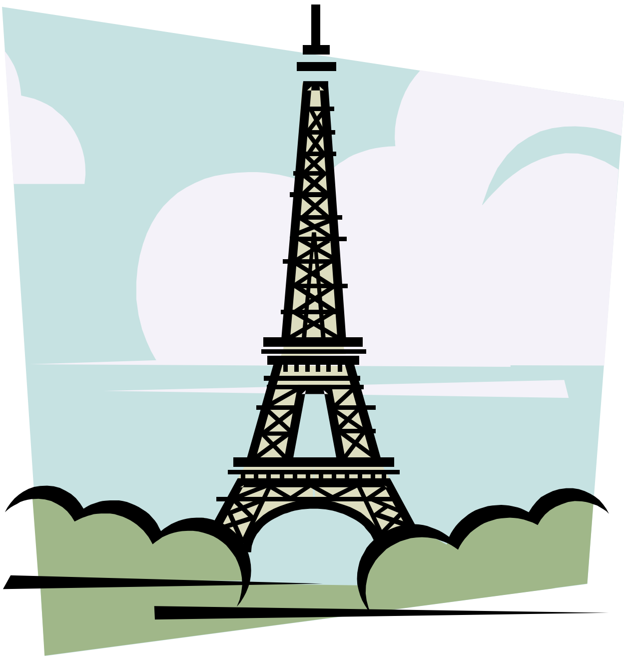
“Distribuição de POISSON”

Como dimensionar e estruturar a análise de custos pela função POISSON do Excel



- ✓ **O que é distribuição de Poisson?**
- ✓ **Como estruturar a função POISSON no Excel?**
- ✓ **Qual a probabilidade de ocorrência de X (valor observado) ou maior do que X pela distribuição de Poisson?**
- ✓ **Como dimensionar custos utilizando a função estatística POISSON do Excel?**

Afonso Celso B. Tobias (afonso@fcavalcante.com.br)

- **Consultor da Cavalcante Consultores, responsável na área de treinamento e consultoria financeira.**
- **Administrador de Empresas e Contador pela Universidade Mackenzie.**
- **Atuou durante 10 anos como consultor financeiro pela Coopers & Lybrand nas áreas de Corporate Finance e Planejamento e Análise de Negócios e 3 anos como gerente de fusões e aquisições pelo Banco Real de Investimento e Banco Alfa de Investimento**
- **Mestrando pela Universidade Mackenzie em Administração de Empresas com ênfase em Gestão Econômico-financeira.**
- **Pós-graduado em Economia pela Universidade Mackenzie e Planejamento e Controle Empresarial pela Fundação Armando Álvares Penteado – FAAP.**
- **Professor de pós-graduação em Planejamento e Controle Empresarial e Administração Contábil e Financeira pela Fundação Armando Álvares Penteado – FAAP.**

ÍNDICE

1. Introdução

A distribuição de Poisson é uma das probabilidades que encontra muitas aplicações práticas, até mesmo no mundo das finanças.

Diz-se que existe um processo de Poisson se pudermos observar eventos numa área de oportunidade em um intervalo contínuo (de tempo, de comprimento, de área de superfície, etc.), de maneira tal que, se encurtarmos a área ou o intervalo analisado, veremos que:

1. A probabilidade de se observar exatamente um sucesso no intervalo é estável
2. A probabilidade de se observar mais de um sucesso no intervalo é zero
3. A ocorrência de um sucesso em qualquer intervalo é estatisticamente independente da ocorrência em qualquer outro intervalo.

Neste Up-to-Date iremos exemplificar como funciona a Distribuição de Poisson demonstrar como ela poderá ser estruturada de forma mais analítica pela função POISSON do Excel, através de um Caso Pratico.

2. O que é Distribuição de Poisson?

Distribuição de Poisson é a probabilidade estatística usada para registrar a ocorrência de eventos imprevisíveis em um grande número de tentativas que se repetem.

Se a probabilidade de sucesso for muito pequena e o número de experiências grande, teremos então a Distribuição de Poisson.

Uma aplicação comum da distribuição Poisson é prever o número de eventos em um determinado período de tempo, como, por exemplo, o número de carros que chegam a um posto de gasolina em uma determinada hora.

Premissas da Distribuição de Poisson

- A probabilidade de ocorrência de um sucesso em cada unidade de medida é a mesma.
- A ocorrência de um sucesso numa unidade de media é independente da que ocorre em qualquer outra unidade.

Com a Distribuição de Poisson analisamos a ocorrências de um evento aleatório com probabilidade por unidade de tempo constante.

Por exemplo, o número de clientes que entram na agência durante a primeira hora do horário de atendimento do banco, o número de solicitações por hora dos usuários de microcomputadores de uma grande empresa de *telemarketing*, o número de clientes atendidos em das 7:00 às 8:00 horas da manhã em um posto de gasolina, etc.

Para melhor entendermos um dos nossos exemplos, vamos supor que vamos examinar o número de clientes atendidos em um posto de gasolina no período determinado.

Qualquer chegada de um dos clientes com seus respectivos carros em um evento discreto de estudo estatístico como este analisado, em um determinado ponto ao longo do espaço contínuo de 1 hora, gerará uma base de dados necessária para o nosso estudo.

Ao longo desse espaço de tempo, pode haver uma média de 180 chegadas.

Se tivéssemos agora que abrir o espaço de 1 hora em 3.600 intervalos consecutivos de um segundo, iremos verificar que:

1. O número esperado (ou a média) de clientes chegando em qualquer intervalo de 1 segundo seria igual a 0,05 (180/3600)
2. A probabilidade de haver mais de um carro chegando em qualquer intervalo de 1 segundo se aproxima de 0 (zero).
3. A chegada de um carro em qualquer intervalo de 1 segundo não tem efeito (quer dizer, é estatisticamente independente) na chegada de qualquer outro carro em qualquer ouro intervalo de 1 segundo.

Probabilidade de Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson tem um parâmetro, chamado de λ (a letra grega minúscula conhecida por lambda), que é a média ou o número esperado de sucessos por unidade.

O número de sucesso **X** da variável aleatória de Poisson varia de 0 (zero) a ∞ (infinito).

A probabilidade de ocorrência de **X** sucessos, dado que λ sucessos são esperados, é:

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{\times}}{X!}$$

Sendo:

P(X) = a probabilidade de **X** sucessos, dado o conhecimento de λ

λ = a média do número de eventos que acontecem por unidade de medida X = 0,1,2,..., ou seja, o número esperado de sucessos

e = constante matemática aproximada em 2,71828.... , conhecido por e-neperiano.

X = número de sucessos por unidade

Obs.: A média e a variância são iguais a lambda: $\mu=\lambda$ e $\sigma^2=\lambda$

Para demonstrar aplicações do modelo de Poisson, voltaremos ao exemplo 1 da chegada de carros ao posto de gasolina.

Se, em média, três carros chegam a cada minuto, qual é a probabilidade de que, em um dado minuto, **exatamente dois clientes** (conhecido por "massa de Poisson") irão chegar no mesmo minuto? Qual é a chance de que **mais de dois clientes** (conhecido como sendo a "probabilidade cumulativa de Poisson") irão chegar em um dado minuto?

Aplicando a equação acima temos a resposta para a primeira pergunta:

$$P(X) = \frac{e^{-3,0}.3,0^2}{2!} = \frac{9}{(2,71828)^3.(2)} = 0,2240$$

Ou seja, a probabilidade de dois carros chegarem no mesmo minuto é de **22,40%.**

E neste momento é que surgem as seguintes perguntas: Quantos funcionários (frentistas) deve ter o posto de gasolina para que não ultrapasse o tempo de espera que os clientes estariam dispostos a gastar ou decidam ir embora? Qual é o custo de perder ou manter um cliente? Este custo é maior ou menor do que o custo de contratar e manter um novo funcionário e atender toda a demanda disponível?

Agora para responder à segunda pergunta, a probabilidade de que num dado minuto mais de dois carros irão chegar, teremos que utilizar outra fórmula matemática, composta pela fórmula básica de Poisson. Vejamos:

$P(X>2) = P(X = 3) + P(X =4) + ...+ P(X = \infty)$

Se a soma de todas as probabilidades em uma distribuição de probabilidades deve ser igual a 1(um), teremos:

$P(X>2) = 1 – P(X \quad 2) = 1 – [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$

Agora, substituindo na nossa primeira equação teremos:

$$P(X > 2) = 1 - \left[\frac{e^{-3,0}.(3,0)^0}{0!} + \frac{e^{-3,0}.(3,0)^1}{1!} + \frac{e^{-3,0}.(3,0)^2}{2!} \right]$$

P(X>2) = 1 – [0,0498 + 0,1494 + 0,2240]

P(X>2) = 1 – 0,4232 = 0,5768 ou 57,68%

Nota: o n! (n fatorial) é o resultado da multiplicação das unidades de 1 até n.

Exemplo: 3! = 1x2x3 = 6

Obs.: 0! (zero fatorial) será sempre 1 (um), assim como 1!.

Desta forma verificamos que existe uma chance de aproximadamente 42,32% de que dois ou menos clientes irão chegar ao postos de gasolina a cada minuto. Portanto, existe uma chance de 57,68% de que três ou mais clientes irão chegar.

Isto demonstra que um dos frentistas estará quase que 60% do seu tempo dedicado a atividade de atendimento direto ao cliente.

Agora, neste momento cabe uma outra pergunta importante:

Quanto tempo cada cliente estará disposto a esperar até que o frentista possa atendê-lo, justificando a não contratação de um novo funcionário? Para a resposta desta questão sugerimos que o leitor retorne ao assunto do Método de Monte Carlo, que já apresentamos no Up-to-Date 241.

Vamos agora a um segundo exemplo:

Exemplo 2:

As pastilhas de uma máquina fresadora de uma metalúrgica são substituídas numa média de oito pastilhas por dia.

Se a distribuição de freqüência das pastilhas substituídas for do tipo Poisson:

- Qual a probabilidade de amanhã substituir cinco pastilhas?
- Qual a probabilidade de amanhã substituir no máximo cinco pastilhas?

Se o valor total mensal do custo das pastilhas for um componente significativo no total do custo da empresa, o cálculo da estimativa deste custo pela distribuição de Poisson será de grande ajuda.

Solução:

Com média λ=8 por dia, a probabilidade de amanhã substituir cinco pastilhas é P(X=5)=**9,16%,** obtida da fórmula da distribuição de Poisson:

$$P(X=5)=\frac{e^{-8}.8^{5}}{5!}=0{,}0916=9{,}16\%$$

Da mesma maneira, a probabilidade de amanhã substituir no máximo cinco pastilhas é P(x<=5)=P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)=**19,12%**, obtida da fórmula acumulada da distribuição de Poisson:

2. Como construir a função POISSON no Excel?

Agora que entendemos como funciona a fórmula da distribuição pelo método de Poisson, vamos verificar como isto pode ser facilitado através do uso do Excel.

A planilha do Excel possui uma função específica para este tipo de cálculo, também denominada como POISSON.

Ela está localizada no grupo de Estatística, que pode ser encontrada através do ícone ***fx*** ou através da barra de ferramentas em “Inserir”, “Função”, “Estatística”, POISSON.

A sintaxe da função estatística POISSON no Excel é:

=**POISSON**(**x**;**média**;**cumulativo**)

A função estatística POISSON dá a probabilidade ou a probabilidade acumulada conforme ao valor do argumento cumulativo, sendo:

- **X** é o número de eventos.
- **Média** (λ) é o valor numérico esperado.
- **Cumulativo** é um valor lógico que determina a forma da distribuição de probabilidade fornecida.
    - Se cumulativo for **VERDADEIRO**, POISSON retornará a probabilidade Poisson de que o número de eventos aleatórios estará entre zero e **x** inclusive, considerando a média (λ);
    - Se **FALSO**, a função retornará a probabilidade somente de **x** considerando a média (λ).

Comentários

- É necessário que X seja um número inteiro, caso contrário o resultado da fórmula será truncado, ou seja, retornará com erro #NÚM!.
- Se X ou média não for numérico, POISSON retornará o valor de erro #VALOR!.
- Se X ≤ 0, POISSON retornará o valor de erro #NÚM!.
- Se média ≤ 0, POISSON retornará o valor de erro #NÚM!.

POISSON é calculada da seguinte maneira no Excel:

	A	B
1	**Dados**	**Descrição**
2	2	O número de eventos (x)
3	5	A média esperada (λ)
4	**Fórmula**	**Descrição (resultado)**
5	=POISSON(A2;A3;VERDADEIRO)	A probabilidade cumulativa Poisson com os termos acima (0,124652) ou **12,46%**
6	=POISSON(A2;A3;FALSO)	A função de probabilidade de massa Poisson com os termos acima (0,084224) ou **8,42%**

3. Caso Prático: Rolamentos Ajustatec

O gerente de controle de qualidade da Fábrica de Biscoitos Bongustu, Sr. Mário, está verificando que existe um gasto excessivo de rolamentos das batedeiras e máquinas de misturas de matéria prima, gerados por um estoque desnecessário.

Estes rolamentos são essenciais para o bom funcionamento dos equipamentos, mas geram um custo adicional devido ao desgaste constante e compras não programadas e emergenciais.

Segundo estudos estatísticos realizados pela controladoria, na média são trocados 3 rolamentos por mês.

Consultado o fornecedor destes componentes, a Ind. Rolamentos Ajustatec verificou que o desgaste deve-se praticamente pelo uso constante das máquinas e o peso acima do permitido para estes equipamentos para mistura das matérias-primas.

Para solucionar definitivamente este problema, o Sr. Mário verificou que deveriam ser adquiridas novas máquinas com capacidades superiores.

No entanto, a ordem da diretoria era de suspender qualquer tipo de investimento em ativo fixo, até que o mercado demonstrasse uma capacidade maior de absorção do novo volume de produção, gerando por uma demanda maior que justificasse tal investimento.

Sendo assim, o Sr. Mário solicitou um novo estudo estatístico para a área da controladoria para simular de 0 (zero) a 10 (dez) substituições de rolamentos em um mês considerando a média de 3 substituições nos meses anteriores.

Pede-se para calcular a probabilidade estatística pela função POISSON no Excel, considerando:

1. P(X)
2. P(<=X)
3. P(<X)
4. P(>X)
5. P(>=X)

4. Solução do Caso Prático: Rolamentos Ajustatec

Primeiro vamos estruturar no Excel a função POISSON e suas derivadas para solucionar o problema para a Bongustu:

	A	B	C	D	E	F
1	Calculando a Probalidade de POISSON					
2	Up-to-Date: 253				Média:	3
3	Caso Prático: **Rolamentos Ajustatec**					
4						
5	X	P(X)	P(<=X)	P(<X)	P(>X)	P(>=X)
6	0	=POISSON($A6;$F$2;FALSO)	=POISSON($A6;$F$2;VERDADEIRO)	=C6-B6	=1-C6	=1-D6
7						

Agora vamos simular para mais dez probabilidades de ocorrências:

	A	B	C	D	E	F
1	Calculando a Probalidade de POISSON					
2	Up-to-Date: 253				Média:	3
3	Caso Prático: **Rolamentos Ajustatec**					
4						
5	X	P(X)	P(<=X)	P(<X)	P(>X)	P(>=X)
6	0	0,04979	0,04979	0,00000	0,95021	1,00000
7	1	0,14936	0,19915	0,04979	0,80085	0,95021
8	2	0,22404	0,42319	0,19915	0,57681	0,80085
9	3	0,22404	0,64723	0,42319	0,35277	0,57681
10	4	0,16803	0,81526	0,64723	0,18474	0,35277
11	5	0,10082	0,91608	0,81526	0,08392	0,18474
12	6	0,05041	0,96649	0,91608	0,03351	0,08392
13	7	0,02160	0,98810	0,96649	0,01190	0,03351
14	8	0,00810	0,99620	0,98810	0,00380	0,01190
15	9	0,00270	0,99890	0,99620	0,00110	0,00380
16	10	0,00081	0,99971	0,99890	0,00029	0,00110
17						

O estudo estatístico acima demonstra que com uma média de 3 rolamentos substituídos por mês, as substituições superiores a X são menos significativas que as inferiores a estes mesmos valores, ou seja, pela Distribuição de Poisson podemos verificar uma tendência de maior ocorrência menor ou igual a média, quanto à substituição dos rolamentos.