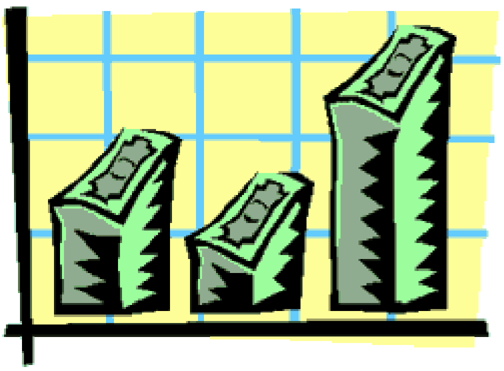
O QUE SÃO E QUAIS SÃO AS PRINCIPAIS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL EM ESTATÍSTICA – PARTE II



- **Média Aritmética Simples e Ponderada**
- **Média Geométrica**
- **Média Harmônica**
- **Mediana e Moda**

Francisco Cavalcante(f_c_a@uol.com.br)

→ Administrador de Empresas graduado pela EAESP/FGV.
→ É Sócio-Diretor da Cavalcante & Associados, empresa especializada na elaboração de sistemas financeiros nas áreas de projeções financeiras, preços, fluxo de caixa e avaliação de projetos. A Cavalcante & Associados também elabora projetos de capitalização de empresas, assessora na obtenção de recursos estáveis e compra e venda de participações acionárias.
→ O consultor Francisco Cavalcante já desenvolveu mais de 100 projetos de consultoria, principalmente nas áreas de planejamento financeiro, formação do preço de venda, avaliação de empresas e consultoria financeira em geral.

Paulo Dragaud Zeppelini(f_c_a@uol.com.br)

→ Administrador de Empresas com MBA em finanças pelo Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais - IBMEC.
→ Executivo financeiro com carreira desenvolvida em instituições financeiras do segmento de mercado de capitais. Atualmente é consultor da Cavalcante & Associados, empresa especializada na elaboração de sistemas financeiros nas áreas de projeções financeiras, preços, fluxo de caixa e avaliação de projetos.

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

No **Up-To-Date® 156** mostramos que com o advento dos computadores a quantidade de dados disponíveis para os profissionais das diversas áreas cresceu de forma gigantesca, o que dificulta o manuseio e a atualização das informações. Por este motivo precisamos lançar mão de determinadas medidas que resumem certas características importantes da população ou amostra que estamos querendo analisar. No **Up-To-Date**® **156** começamos a mostrar algumas dessas medidas conhecidas como medidas de tendência central em virtude dos dados observados se agruparem em torno desses valores centrais. A moda, a média aritmética e a mediana são as três medidas de tendência central mais utilizados para resumir o conjunto de valores representativos do fenômeno que se pretende estudar. Outras medidas importantes são a média geométrica e a média harmônica que serão mostradas neste **Up-To-Date®.**

MÉDIA GEOMÉTRICA

A média geométrica de *n* números positivos é definida como a raiz *n*-ésima do produto de todos eles. A média geométrica é utilizada principalmente para calcular médias de razões, de taxas de variação, e de índices econômicos. Ela pode ser simples ou ponderada, conforme se utilize ou não no seu cálculo uma tabela de freqüências.

Dados *n* valores $x^1, x^2, \ldots, xn$, a média geométrica desses valores será:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x1 * x2 * x...xn}$$

Exemplo, calcular a média geométrica dos seguintes conjuntos de números:

X = {10, 60, 360}

Y = {2, 2, 2, 2}

No primeiro conjunto temos:

$X^1 = 10$ $\quad$ n = 3

$X^2 = 60$

$X^3 = 360$

$\bar{x}_g = \sqrt[3]{x1 * x2 * x3} = \sqrt[3]{10 * 60 * 360} = \sqrt[3]{216000}$ = 60, portanto

$\bar{x}_g = 60$

No segundo conjunto temos:

$Y^1 = y^2 = y^3 = y^4 = 2$ e n = 4

$\bar{y}_g = \sqrt[4]{y1 * y2 * y3 * y4} = \sqrt[4]{2 * 2 * 2 * 2} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

Vamos mostrar um exemplo para o cálculo da média de taxas de variação.

Suponha que você tenha investido $500 em 1998. Após um ano esta aplicação passou a valer $650. Contente com o resultado você reaplicou esta quantia por mais um ano obtendo um montante final de $910. Qual será a taxa média de aumento do capital investido?

A taxa média de aumento de capital será obtida mediante o cálculo de uma média geométrica. Vamos calcular primeiro as taxas de aumento de capital, período a período:

Período	Taxa
1998/1999	650/500 = 1,3
1999/2000	910/650 = 1,4

$\overline{x}_g = \sqrt[2]{1{,}3 * 1{,}4}$ = 1,3491, portanto, a taxa média de aumento do capital investido no período de dois anos foi de 34,91%.

Comparando com a média geométrica:

- A média geométrica é menos afetada por valores extremos;
- A média geométrica é uma medida mais central quando os valores da variável apresentam uma taxa constante de crescimento;
- Para um mesmo grupo de valores, a média geométrica é sempre menor que a média aritmética.

MÉDIA GEOMÉTRICA PONDERADA

Para uma seqüência numérica x**:** x1, x2,......xn, afetada pelos pesos p1, p2.... pn respectivamente, a média geométrica ponderada será designada por $\overline{x_g}$ (leia-se “x barra g”) é definida por:

$$\overline{x_g} = \sqrt[\sum_{j=1}^{k} fj]{x1^{f1} x\, x2^{f2} x ... x\, xk^{fk}}$$

Exemplo: Calcule a média geométrica dos valores constantes da seguinte tabela:

xf	**fj**
1	2
3	4
9	2
27	1
	$\sum_{j=1}^{k} fj = 9$

$$\overline{x_g} = \sqrt[9]{1^2 x 3^4 x 9^2 x 27^1}$$

$$\overline{x_g} = \sqrt[9]{1 x 81 x 81 x 27} = \sqrt[9]{177147}$$

$$\overline{x_g} = 3{,}829554$$

MÉDIA HARMÔNICA

A média harmônica de *n* números x_1 , $x_{2,}$ ...... x_n se define como *n* dividido pela soma dos inversos dos números.

Portanto, em um conjunto de *n* valores x^1, x^2, ..., x^n, a média harmônica do conjunto será:

$$\overline{x}_h = \frac{1}{\dfrac{\frac{1}{x1}}{n} + \dfrac{\frac{1}{x2}}{n} + \ldots + \dfrac{\frac{1}{xn}}{n}} \qquad \text{ou} \qquad \overline{x}_h = \frac{1}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{xi}}{n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{xi}}$$

Vamos calcular a média harmônica simples do conjunto de números abaixo:

X = {10, 60, 360}

$$\overline{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{xi}} = \frac{3}{\frac{1}{10} + \frac{1}{60} + \frac{1}{360}} = \frac{3x360}{43} = 25{,}12$$

A média harmônica é utilizada no caso de freqüências musicais e em algumas outras situações especiais. Por exemplo, se um passageiro viaja 10 quilômetros em uma rodovia a 60 quilômetros por hora e os próximos 10 quilômetros em uma estrada secundária a 30 quilômetros por hora, sua velocidade média não é de 45 quilômetros por hora ((60 + 30) / 2) = 45). Na verdade, ele terá percorrido um total de 20 quilômetros em 30 minutos, de modo que a velocidade média certa é de 40 quilômetros pôr hora. Verifique que a média harmônica de 60 e 30 é 40, e portanto, é a média correta para este exemplo.

$$\overline{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{xi}} = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{30}} = \frac{2x60}{30} = 40$$

Vamos imaginar agora que um investidor tenha comprado $18.000 de ações de uma companhia a $45 a ação, e em seguida compra $18.000 a $36 a ação. Qual o preço médio por ação, pago pelo investidor?

$$\overline{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{xi}} = \frac{2}{\frac{1}{45} + \frac{1}{36}} = \frac{2x180}{9} = 40$$

O preço médio por ação será de $40.

A MEDIANA

A característica principal da mediana é dividir um conjunto ordenado de dados em dois grupos iguais; a metade terá valores inferiores à mediana, a outra metade terá valores superiores à mediana.

Para calcular a mediana, é necessário primeiro ordenar os valores do mais baixo ao mais alto. Em seguida, conta-se até a metade dos valores para achar a mediana.

Por exemplo, a mediana do conjunto 5, 6, 8 é 6; 6 está no meio. Em geral, a mediana ocupa a posição (n+1)/2. Logo, para três números, a posição é (3 + 1)/2 = 2, ou seja, a segunda posição.

O processo para se determinar a mediana é o seguinte:

1. Ordenar os valores;
2. Verificar se há um número ímpar ou par de valores;
3. Para um número ímpar de valores, a mediana é o valor do meio. Para um número par de valores, a mediana é a média dos dois valores do meio.

Veja mais alguns exemplos:

Par	Mediana
a) 2, 3, 3, 4	3
b) 1, 18, 19, 20	18,5
Ímpar	**Mediana**
c) 1, 2, 3, 3, 3, 4, 7	3
d) 9, 40, 80, 81, 100	80

Vamos determinar a mediana do seguinte conjunto de valores:

X: {7, 21, 13, 15, 10, 8, 9, 13}

1º Passo: Ordenar

x: {7, 8, 9, 10, 13, 13, 15, 21}

2º Passo: Números de elementos = 8 (par), portanto o termo central é:

$\frac{8}{2} = 4^o$ elemento e $\frac{8}{2} + 1 = 5^o$ elemento

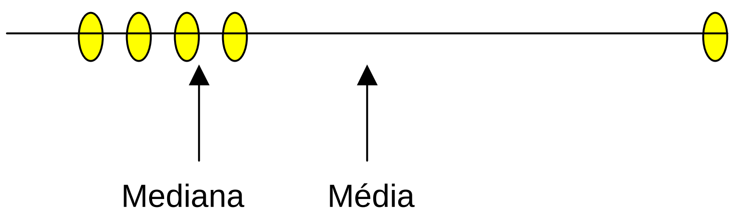
O elemento que ocupa a quarta posição na série é **10** e o elemento que ocupa a quinta posição na série é **13**, portanto a Mediana é:

Mediana = $M_d = \frac{10+13}{2} = 11{,}5$

Dessa forma, podemos interpretar que 50% dos valores do rol são valores menores ou iguais a 11,5 e 50% dos valores do rol são valores maiores ou iguais a 11,5.

COMPARAÇÃO ENTRE MÉDIA E MEDIANA

A escolha da média, ou da mediana como medida de tendência central de um conjunto, depende de vários fatores. A média é sensível a cada valor do conjunto, ou seja, ela é influenciada por cada um desses valores, inclusive os extremos. Por outro lado, a mediana é relativamente insensível aos valores extremos.



Observe que na figura acima, a média é influenciada por um valor do extremo, enquanto que a mediana não é. Dessa forma, se tomarmos como exemplo, a renda pessoal ou o valor de casas de residência, a mediana tem uma medida descritiva mais adequada, isto porque bastam alguns valores muito grandes para inflacionar a média aritmética.

A MODA

Genericamente a moda é definida como o valor que ocorre com maior freqüência num conjunto. Por exemplo, dados os números {10, 10, 8, 6, 10}, há três números 10 e um de cada um dos outros números. O valor mais freqüente, portanto é 10 – a moda é 10. A moda funciona como medida descritiva quanto se trata de *contar* dados.

A moda, comparada com a média e com a mediana, é a menos útil das medidas para problemas estatísticos, porque não se presta à análise matemática, ao contrário do que ocorre com as outras duas medidas. Todavia, de um ponto de vista puramente descritivo, a moda indica o valor "típico" em termos da maior ocorrência. A utilidade da moda se acentua quando um ou dois valores, ou um grupo de valores, ocorrem com muito maior freqüência que outros. Inversamente, quando todos ou quase todos os valores ocorrem aproximadamente com a mesma freqüência, a moda nada acrescenta em termos de descrição de dados.

Exemplificando o cálculo da Moda, abaixo damos alguns conjuntos de valores:

$$x = \{4,5,5,6,6,6,7,7,8,8\}$$

$$y = \{4,4,5,5,6,6\}$$

$$z = \{1,2,2,2,3,3,4,5,5,5,6,6\}$$

$$w = \{1,2,3,4,5\}$$

Moda de x: $M_o = 6$. O valor 6 é o mais freqüente (3 ocorrências).

Moda de y: Este conjunto é amodal, pois seus três valores apareceram duas vezes cada um. Não há, portanto, predominância de nenhum valor do conjunto sobre os outros.

Moda de z: $M_{o1} = 2$ e $M_{o2} = 5$. Trata-se de um conjunto bi-modal, uma vez que tanto o valor 3 como o valor 5 apresentou o maior número de observações.

Moda de w: Esse é outro conjunto amodal.

Quadro comparativo

	Definição	Vantagens	Limitações
Média	$\bar{x} = \frac{\sum xi}{n}$	1. Reflete cada valor 2. Possui propriedades matemáticas atraentes	1. É influenciada por valores extremos
Mediana	Metade dos valores são maiores e metade são menores	1. Menos sensível a valores extremos do que a média	1. Difícil de determinar para grande quantidade de dados
Moda	Valor mais freqüente	1. Valor típico: maior quantidade de valores concentrados neste ponto	1. Não se presta a análise matemática 2. Pode não ser moda para certos conjuntos de dados